Кеңейтіңкіреген класс сақтау облысымен Соболев кеңістігінде функцияларды жалғастырудың негізгі ұғымдары.

Басқа лекцияларда байқағанымыздай, $W_p^l(\Omega)$ кеңістігінде шекаралық есептерді шешуде, кейде берілген Ω-да функцияларды жалғастыруға тура келеді, $\tilde{\Omega} \supset \overline{\Omega}$ үлкен облыста жалғастырылған функциялар $W_p^l(\tilde{\Omega})$-ның $(1 \le p < \infty)$ элементтері болатындай және мына теңсіздік орындалатындай:

$$\| u \|_{W_p^l(\tilde{\Omega})} \le C(p, l, \Omega, \tilde{\Omega}) \| u \|_{W_p^l \Omega} \qquad (1)$$

C - тұрақтысы $u(x)$-тен тәуелсіз. Жалғастырылған функцияларға алдыңғы белгілеулер қалады. Келесі теорема облыстың шекарасы Липшицтік болғанда ғана дұрыс болады.

Теорема $\partial\Omega \in Lip1,\ \ l \in N,\ 1 \le p < \infty$ болсын. Онда кез келген $u(x) \in W_p^l(\Omega)$-ке $U(x) \in W_p^l(R^n),\ \ U(x) = u(x)$ жалғастыруы табылады, бұдан

$$\| U \|_{W_p^l(R^n)} \le C \| u \|_{W_p^l \Omega}$$

C - тұрақтысы $u(x)$-тен тәуелсіз.

Егер $u(x) \in \overset{0}{W}{}_p^l(\Omega)$ болса, онда оны нөлмен жалғастырсақ, $\forall \tilde{\Omega} \supset \overline{\Omega}$-да $u(x) \in \overset{0}{W}{}_p^l(\tilde{\Omega})$ функциясын аламыз. Сақталу классымен жалғастырылатын функцияларға кең көлемді әдебиеттер арналған (Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.И. Интегральные представления и теорема вложения М., Наука. 1975)(Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференцирования свойства функций. –М. Мир, 1973).

Пуанкаре теңсіздігі. $\overset{0}{W}{}^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ **- дағы функция ізі**

Соболев туындыларын анықтау негізінде Лебег интегралы жатыр, сондықтан барлық дерлік жерде функциялар беттесетін (яғни нөл өлшемді жиындарда ерекшеленетін), $L^2(\Omega),\ H^1(\Omega),\ H_0^1(\Omega)$ кеңістіктердің әрқайсысының бір элементі беріледі. Сәйкесінше, $u(x)$ функциясының өзгеруі, қандай да бір R гипержазықтықтағы (гипержазықтық көлемдік кеңістікте нөлдік өлшемге ие) Ω немесе $\overline{\Omega}$ –діңбейнеленуі ретінде, бұл функцияны «функционалдық кеңістік элементі» ретінде өзгермейді. Бұдан «гипербеттегі $L^2(\Omega),\ H^1(\Omega),\ \overset{0}{H}{}_0^1(\Omega)$ кеңістіктердегі функциялардың мәндері» деген түсініктің мәні болмайды.

Сонда да бұл түсінікке әбден айқын мағына беруге болады екен, ал $H^1(\Omega)$ немесе $\overset{0}{H}{}_0^1(\Omega)$ (тек $L^2(\Omega)$ емес) кеңістіктерінің жағдайында қарапайым функциялардың (жалпыланған емес) класстарынан шықпайды.

Қарапайымдылық үшін кішірек $H_0^1(\Omega)$ кеңістікпен шектелейік. Анықтама бойынша, $C_0^\infty(\Omega) = D(\Omega)$ кеңістігі $H_0^1(\Omega)$–де барлық жерінде тығыз, яғни $\overline{D(\Omega)}^{H^1(\Omega)} = H_0^1(\Omega)$. Біз $u \in D(\Omega)$ функцияларын барлық R^n берілген деп аламыз, оларды Ω–дан тыс нөлмен анықтаймыз. Кез-келген $u(x) \in C_0^\infty(R^{n-1})$ функциясы $C_0^\infty(R^{n-1})$ кеңістігінің элементі болатын $x_j = const$ гипержазықтықта $\gamma(u)$ ізі анықталған. Сол арқылы, бейнелеуі алынады:

$$\gamma:\ C_0^\infty(R^n) \to C_0^\infty(R^{n-1})$$

Бұл γ бейнелеуі $L^2(\Omega)$- де $H^1(\Omega)$-ден үздіксіз жалғасатынын көрсетейік, мұнда Ω' деп Ω-мен $x_j = const$ гипержазықтық қиылысы: $\Omega' = \Omega \cap \{x_j = const\}$.

Теорема 1 Егер $u_n(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ функциясы $H_0^1(\Omega)$ нормасы бойынша фундаменталь болса, онда ол $x_j = const$ гипержазықтықта $L^2(\Omega')$ нормасы бойынша фундаменталь болады.

Дәлелдеу Айталық, анықтық үшін $i=1,\ \ x_1 = const = x_0^1$ дейік. $\Omega = \{x : |x_j| \le A,\ \ i=1,...,n\}$ болсын. Алдыңғыдай, Ω -дан тысқары $u=0$ десек,

$$u(x_1^0, x_2, ..., x_n) = \int_{-A}^{x_1^0} \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1$$

Коши-Буняковский теңсіздігінен,

$$u^2(x_1^0, x_2, ..., x_n) = \left(\int_{-A}^{x_1^0} \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 \right)^2 \le 2A \int_{-A}^{A} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 dx_1 ,$$

$x_1 = x_1^0$ бойынша интегралдаймыз:

$$\int_{(x_1 = x_1^0) \cap \Omega} u(x_1^0, x_2, ..., x_n) dx_2 dx_3 ... dx_n \le 2A \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 dx = 2A \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{2,\Omega}^2 \le 2A \| u \|_{H_0^1(\Omega)}^2 .$$

Бұд теңсіздікті $u = u_m - u_k$ үшін жазайық:

$$\| u_m - u_k \|_{L_2(\Omega')} = \int_{\Omega'} (u_m - u_k)^2 dx_2 ... dx_n \le 2A \| u_m - u_k \|_{H_0^1(\Omega)} \tag{1}$$

яғни, $u_n(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ функциясының u_n тізбегі $H_0^1(\Omega)$ номасында жинақталады, $n \to \infty$ болған жағдайда $x_j = const$ гипержазықтықта $L^2(\Omega')$ нормасы бойынша жинақталады.

§ Эллиптикалық теңдеу үшін спектральдық есеп. Дирихле, Нейман және үшінші шекаралық есептің жалпыланған меншікті функциялары. Өзіне өзі түйіндес компакт оператордың операторлық теңдеуі.

Спектральдық есеп үшін келесі эллиптикалық теңдеуді

$$-div(p(x)\nabla \vartheta(x))+q(x)\vartheta(x)=\lambda\vartheta(x), \quad x\in\Omega\subset R^n \tag{1}$$

$$\vartheta\big|_{\Gamma=\partial\Omega}=0 \tag{2}$$

немесе

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\vec{n}}+\sigma(x)\vartheta(x)\Big|_{\Gamma=\partial\Omega}=0 \tag{3}$$

шекаралық шартымен қарастырамыз, мұндағы барлық коэффициенттер $p(x), q(x), \sigma(x)-$ жеткілікті жатық функциялар, нақтырақ айтқанда: $p(x)\in C^1(\overline{\Omega}),\, q(x)\in C(\overline{\Omega}),\, \sigma(x)\in C(\partial\Omega);$ $\sigma(x)\succ 0,\ p(x)\ge p_0\succ 0,\, q(x)\ge 0$. $\frac{\partial}{\partial\vec{n}}-Q$ цилиндрінің $\sum -$ бүйір бетіне қарай $\vec{n}$ ішкі нормалінің бағыты бойынша алынған туындыны білдіреді. Айталық $\partial\Omega-$ бөлікті жатық бет болсын.

Бізге тек $(1),(2)$ және $(1),(3)$ есептері тривиал емес шешімге ие болатын λ мәндерін табу керек, яғни $\|\vartheta\|\ne 0$.

Осындай λ мәндері меншікті мәндер деп аталады, ал сәйкес тривиал емес $(1),(2)$ немесе $(1),(3)$ есептерінің шешімдері меншікті функциялар деп аталады. Бір ғана λ мәніне сәйкес келетін сызықты тәуелсіз меншікті функциялардың саны меншікті мәннің еселігі деп аталады.

Егер $\vartheta(x)-$ меншікті функция болса, онда есептің сызықтылығы мен біртектілігіне орай $C\vartheta(x)$ функциясы кез – келген $C\ne 0$ үшін меншікті функция болады.

Сол себепті біз $L_2(\Omega)-$да нормаланған $\|\vartheta\|_{2,\Omega}=1$ шартын қанағаттандыратын меншікті функцияларды қарастырамыз.

Меншікті мәнге жалпылама түрде қойылған есепті қарастырамыз, яғни $(1),(2)$ есебін $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде, ал $(1),(3)$ есебін $W_2^1(\Omega)$ кеңістігінде қарастырамыз.

Анықтама 1. $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\ni\forall\,\overline{\Phi}$ үшін мына интегралдық тепетеңдік

$$\int_\Omega\left[\sum_{k=1}^n p(x)\frac{\partial\vartheta}{\partial x_k}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial x_k}+q(x)\vartheta(x)\overline{\Phi}(x)\right]dx=\lambda\int_\Omega\vartheta(x)\overline{\Phi}(x)dx, \tag{4}$$

орынды болатындай λ табылып, оған сәйкес нөлге тепе – тең емес $(\vartheta(x)\ne 0)$ (1) ,(2) теңдеудің жалпылама шешімін осы есептің, яғни Дирихле есебінің жалпылама меншікті функциясы деп атаймыз.

2-ші және 3-ші шекаралық есептер үшін:

Анықтама 2. $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\ni\forall\,\overline{\Phi}$ үшін мына интегралдық тепетеңдік

$$\int_\Omega\left[\sum_{k=1}^n p(x)\frac{\partial\vartheta}{\partial x_k}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial x_k}+q(x)\vartheta(x)\overline{\Phi}(x)\right]dx+\int_{\partial\Omega}p(x)\sigma(x)\vartheta(x)\overline{\Phi}(x)dS=\lambda\int_\Omega\vartheta(x)\overline{\Phi}(x)dx, \tag{5}$$

орындалатындай λ табылып, оған сәйкесті тривиал емес $\vartheta(x)\ne 0$ табылған $\vartheta(x)$ жалпылама шешімін $\sigma(x)\equiv 0$ жағдайда екінші шекаралық есептің жалпылама меншікті функциясы деп, немесе $\sigma(x)\not\equiv 0$ жағдайында үшінші шекаралық есептің жалпылама меншікті функциясы деп атаймыз.

Біз осыған дейін нақты мәнді функциялар қарастырып келдік және $L^2(\Omega)$-дегі скалярлық көбейтіндіні $(f,\Phi)=\int_\Omega f(x)\Phi(x)dx$ қолдандық, енді функциялар комплекс мәнді болуы мүмкін деп, сәйкесті $L^2(\Omega)$-дегі скалярлық көбейтіндіні $(f,\overline{\Phi})=\int\limits_{\Omega} f(x)\overline{\Phi}(x)dx$ түрінде аламыз.

Бұдан ары қарай, жалпылама меншікті функцияларды табу үшін, (4),(5) интегралдық тепетеңдіктерді пайдаланамыз. Сондықтан, (4),(5) –тің сол жақтары сәйкесті гильберттік кеңістіктеріндегі скалярлық көбейтіндіні туындатқаны қажет.

(4) теңдіктің сол жағы

$$\{\vartheta,\overline{\Phi}\}:=\int\limits_{\Omega}\left[\sum_{k=1}^{n}p(x)\frac{\partial\vartheta}{\partial x_k}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial x_k}+q(x)\vartheta(x)\overline{\Phi}(x)\right]dx \tag{6}$$

біздің коэффициенттерге қойған шарттарымыз бойынша $p(x)\ge p_0\succ 0,\ q(x)\ge 0$ $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$-дегі скалярлық көбейтіндіні туындататынын анық байқауға болады, себебі ол Фридрихс теңсіздігінен және $(\vartheta,\vartheta)=0$ теңдігінен $\vartheta(x)\equiv 0$ шығады.

Тап осылай (5)-ші теңдік үшін де орындалады, Егер $W_2^1(\Omega)\ni\vartheta(x),\Phi(x)$ үшін $q(x)$ және $\sigma(x)$ бір мезетте нөлге тең болмаған жағдайда, $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\ni\forall\,\overline{\Phi}$ үшін

$$\{\vartheta,\Phi\}^{\sigma}:=\int\limits_{\Omega}\left[\sum_{k=1}^{n}p(x)\frac{\partial\vartheta}{\partial x_k}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial x_k}+q(x)\vartheta(x)\overline{\Phi}(x)\right]dx+\int\limits_{\partial\Omega}p(x)\sigma(x)\vartheta(x)\overline{\Phi}(x)dS\,. \tag{7}$$

$q(x)=\sigma(x)=0$ жағдайында (7) теңдік скалярлық көбейтінді бола алмайды, себебі $\{\vartheta,\vartheta\}^{\sigma}=0$ көбейтіндісінен $\vartheta=const$ шығады, яғни скалярлық көбейтіндісінің $\vartheta=0$ шарты орындалмайды.

Нейман есебі үшін жалпылама шешімді анықтаудағы интегралдық тепетеңдіктің сол жағы скалярлық көбейтіндіні туындатуы үшін, (1) теңдеудің орнына қойған эквивалентті келесі теңдеуді қарастырамыз (бұл барлық үш шекаралық есепке бірдей болсын деп қалдырамыз).

$$-div(p(x)\nabla\vartheta(x))+\tilde{q}(x)\vartheta(x)=(\lambda+1)\vartheta(x),\quad x\in\Omega\subset R^n \tag{8}$$

мұндағы $\tilde{q}(x)=q(x)+1\ge 1$ және (8) теңдеуге сәйкесті (4) және (5) интегралдық тепетеңдіктер үшін ізделінді меншікті мәндер 1 санына жылжиды.

Дирихле есебін, (8) және (2) есепті қарастырамыз. Келесі түрдегі скаляр көбейтіндіні енгіземіз:

$$\{\vartheta,\Phi\}_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)}=\int\limits_{\Omega}\left[p(x)\nabla\vartheta\nabla\overline{\Phi}+q(x)\vartheta(x)\overline{\Phi}(x)\right]dx \tag{9}$$

Онда (4) интегралдық тепетеңдігі келесі түрге келеді:

$$\{\vartheta,\Phi\}_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)}=(\lambda+1)(\vartheta,\Phi)_{2,\Omega} \tag{10}$$

мұндағы $(\vartheta,\Phi)_{2,\Omega}=(\vartheta,\Phi)_{L_2(\Omega)}$ $L_2(\Omega)$ – дегі қарапайым скалярлық көбейтінді.

Рисс теоремасын пайдаланып, келесі теореманы дәлелдейік.

Теорема 1. $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде жататын кез келген $\Phi(x)$ үшін

$$(\vartheta,\Phi)_{2,\Omega}=(A\vartheta,\Phi)_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} \tag{11}$$

теңдігі орынды болатындай сызықты шенелген $A:L_2(\Omega)\to\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ операторы табылады.

(ii) A операторының A^{-1} кері операторы бар.

(iii) Егер A операторын $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ – ны $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ – ға бейнелейді деп қарастырсақ, онда ол өзіне – өзі түйіндес, теріс емес, компакт болады.

Дәлелдеу. *(i)* Гильберт кеңістігіндегі сызықты, үзіллiссіз функционалдың жалпы түрі туралы Рисс теоремасын пайдаланамыз. Айталық, $L_2(\Omega)\ni\vartheta(x)$ бекітілген функция болсын. Φ бойынша сызықты, $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\ni\Phi(x)$ функциясына әсер ететін $l_{\vartheta}=l(\Phi)=(\vartheta,\Phi)_{2,\Omega}$ функционалын қарастырайық. Ол шенелген, себебі Фридрихс теңсіздігі пайдалана отырып, мына бағалауды аламыз

$$\left|l_\sigma(\Phi)\right| = \left|(\vartheta,\Phi)_{2,\Omega}\right| \le \|\vartheta\|_{2,\Omega}\cdot\|\Phi\|_{2,\Omega} \le C\|\vartheta\|_{2,\Omega}\cdot\|\Phi\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)}.$$

Сол себепті Рисс теоремасы бойынша $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \ni \Phi(x)$ үшін $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$-де жататын жалғыз $\omega(x)$ функциясы табылып

$$l(\Phi) = (\vartheta,\Phi)_{2,\Omega} = \{\omega(x),\Phi\}_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} \qquad \forall\Phi(x)\in H_0^1(\Omega)$$

теңдігі орынды болады, сонымен қатар

$$\|\omega(x)\|_{H_0^1(\Omega)} = |l(\Phi)| \le C\|\vartheta\|_{2,\Omega} \tag{12}$$

бағалауын аламыз.

Яғни A сызықты операторы біздің жағдайымызда, барлық $L_2(\Omega)$ элементтері үшін анықталады:

$A: L_2(\Omega)\to \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, $A\vartheta=\omega$, және A үшін (11) теңдігі орынды. (11) және (12) теңдіктерінен

$$\|A\vartheta\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} \le C\|\vartheta\|_{2,\Omega}.$$

теңсіздігі орынды, яғни A операторы $L_2(\Omega)$-ден $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$-ға бейнелеу операторы ретінде шенелген болып шықты.

(ii) A операторы A^{-1} кері операторы бар.

A^{-1} операторы:әртүрлі екі нүктеде әртүрлі мән қабылдайтын сызықтық A операторы үшін анықталады. Егер осы шарт орындалса, онда анықтама бойынша $A\vartheta=\omega$ жағдайында, $A^{-1}\omega=\vartheta$.

Берілген A операторының мәндер аймағы кері A^{-1} операторының анықталу аймағы болып табылады. A^{-1} кері операторының бар болуының жеткілікті де қажетті шарты болып, $\ker A=0$ ядросының тривиалдығы саналады, яғни $Au=0$ жалғыз $u=0$ үшін. Біздің жағдайымызда A операторының өзегі тек нөлден ғана тұра ма екенін тексерейік.

Шынымен де, егер бекітілген $L_2(\Omega)\ni\vartheta$ үшін $A\vartheta=0$ болсын, онда (11) теңдік бойынша $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\ni\forall\Phi(x)$ үшін (ϑ,Φ) осыдан $\vartheta=0$ екендігі шығады. Осымен, A^{-1} кері операторының бар болуы дәлелденді.

(iii) Енді (11) A операторы $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$-ті $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$-ке бейнелейді десек, онда оның өзіне өзі түйіндес болатынын дәлелдейік. Егер A операторы $L_2(\Omega)$ кеңістігінде анықталып және шенелген болса, онда ол $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\in L_2(\Omega)$ кеңістігіндеде анықталған және шенелген болады, себебі $\overset{0}{W}{}_2^1\subset L^2(\Omega)$. Сондықтан, оның симметриялы екенін ғана тексеру жеткілікті. $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$- дегі барлық ϑ мен Φ үшін

$$\{A\vartheta,\Phi\}_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} = (\vartheta,\Phi)_{2,\Omega} = \overline{(\Phi,\vartheta)}_{2,\Omega} = \overline{\{A\Phi,\vartheta\}}_{\overset{0}{W}{}_2^1} = \{\vartheta,A\Phi\}_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} \quad \text{шығады.}$$

Функционалдық талдау курсынан еске түсірейік, A операторы оң анықталған деп аталады, егер одан туындалған шаршы тұлға тек теріс емес мәндер қабылдаса, яғни $(A\vartheta,\vartheta)\ge 0 \quad \forall\vartheta\in D(A)$.

Осыдан аламыз $\{A\vartheta,\vartheta\}_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} = (\vartheta,\vartheta)\ge 0$, яғни A операторы оң анықталған.

Енді $A:\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\to\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ компакт екенін көрсетейік. $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде кез келген шенелген жиынды қарастырайық. $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\subset L_2(\Omega)$ компакт енгізу теоремасына сәйкес, бұл функциялар жиыны $L_2(\Omega)$ кеңістігінде компакт болады. Демек, кез келген ақырсыз ішкі кеңістіктерінен $L_2(\Omega)$ кеңістігінде іргелі болатын $\{\vartheta_{k_s}\}$ тізбекшесін таңдап алуға болады. Бірақ A операторы сызықты және шенелген. Осыдан, $k_s\to\infty$

$$\left\|A\vartheta_{k_s}-A\vartheta\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)}=\left\|A(\vartheta_{k_s}-\vartheta)\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)}\le C\left\|\vartheta_{k_s}-\vartheta\right\|_{L_2(\Omega)}\to 0.$$

Ал $s,n\succ N$ үшін

$$\left\|A\vartheta_{k_s}-A\vartheta_{k_n}\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)}=\left\|A(\vartheta_{k_s}-\vartheta_{k_n})\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)}\le C\left\|\vartheta_{k_s}-\vartheta_{k_n}\right\|_{L_2(\Omega)}=C\left\|\vartheta_{k_s}-\vartheta\right\|_{L_2(\Omega)}\to 0.$$

Бұдан, $\{A\vartheta_{k_s}\}$ тізбекшесі $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде іргелі, яғни A $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде шенелген операторы осы кеңістіктің өзіне компакт болып көшіреді, демек $A-$ компакт оператор.

Меншікті мән туралы есепті зерттеуді жалғастырамыз.
Теорема 1 қолданып, (10) теңдікті келесі түрде жазамыз:

$$\{\vartheta,\Phi\}_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)}=(\lambda+1)\{A\vartheta,\Phi\}_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)}\quad\forall\,\Phi\in\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega).\tag{13}$$

Осыдан A компакт оператор болатын

$$\vartheta=(1+\lambda)A\vartheta,\quad\vartheta(x)\in\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\tag{14}$$

операторлық теңдеуді аламыз. (8) теңдеу (яғни (1) теңдеу) үшін меншікті мәнге Дирихле есебі компакт, теріс емес, өзіне-өзі түйіндес A операторының меншікті мән есебіне айналды. Дәл осылай, (3) (екінші және үшінші шекаралық есепті) шекаралық шарты бар есепті компакт, теріс емес, өзіне-өзі түйіндес A операторының меншікті мән есебіне келтіруге болады.

Теорема 2 Кез – келген $\Phi\in W_2^1(\Omega)$ үшін

$$(\vartheta,\Phi)_{2,\Omega}=(\tilde{A}\vartheta,\Phi)_{W_2^1(\Omega)}\tag{15}$$

теңдігі орындалатындай сызықты шенелген $\tilde{A}:L_2(\Omega)\to W_2^1(\Omega)$ (анықталу облысы $L_2(\Omega)$) операторы табылады.

$\tilde{A}$ операторының $\tilde{A}^{-1}$ кері операторы бар.

Егер $\tilde{A}$ операторын $W_2^1(\Omega)-$ дан $W_2^1(\Omega)-$ ға қарастырсақ (яғни $D(A)=W_2^1(\Omega)$), онда өзіне – өзі түйіндес, теріс емес, компакт болады. Теорема 2 дәлелденуі Теорема 1 дәлелімен ұқсас дәлелденеді.

Ол үшін (8) теңдеумен туындалған ((5) сәйкес) келесі түрдегі скаляр көбейтінді енгіземіз

$$\{\vartheta,\Phi\}_{W_2^1(\Omega)}=\int\limits_{\Omega}\left[p(x)\nabla\vartheta\nabla\overline{\Phi}+q(x)\vartheta(x)\overline{\Phi}(x)\right]dx+\int\limits_{\partial\Omega}p(x)\sigma(x)\vartheta(x)\overline{\Phi}(x)dS.\tag{16}$$

Осы скаляр көбейтіндіден туындалған (16) нормасы $W_2^1(\Omega)$ кеңістігінің нормасына эквивалент екенін оңай көрсетуге болады. Жоғарыда айтылған тұжырымдарды қайталай отырып, енді тек $W_2^1(\Omega)$ кеңістігінде (16) скаляр көбейтіндісімен және $W_2^1(\Omega)\subset L_2(\Omega)$ енгізудің компактылығы туралы теореманы қолдана отырып, біз операторлық теңдеу үшін меншікті мән есебіне

$$\vartheta=(1+\lambda)\tilde{A}\vartheta,\quad\vartheta(x)\in W_2^1(\Omega)\tag{17}$$

келеміз, $\tilde{A}:W_2^1(\Omega)\to W_2^1(\Omega)$ өзіне – өзі түйіндес, теріс емес, компакт оператор.

Теорема 1 және Теорема 2 келесі тұжырымданды аламыз.

Тұжырым 1 λ саны анықталу облысы $D(A)=\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ болатын (1) теңдеудің өзіне қойылған эллиптикалық оператор үшін (2) D есебінің меншікті мәні, ал $\vartheta(x)-$сәйкес жалпылама меншікті функция болады, сонда тек сонда ғана, егер $(\lambda+1)$ өзіне – өзі түйіндес, теріс емес, компакт A операторының сипаттауыш саны болса. $A:\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\to\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, ал $\vartheta(x)-$осы санға сәйкес меншікті элемент.

Тұжырым 2 λ саны анықталу облысы $D(A)=W_2^1(\Omega)$ болатын (1) теңдеудің өзіне қойылған эллиптикалық оператор үшін (3) шектік есебінің меншікті мәні, ал $\vartheta(x)-$сәйкес жалпылама меншікті функция болады, сонда тек сонда ғана, егер $(\lambda+1)$ өзіне – өзі түйіндес, теріс емес, компакт $\tilde{A}$ операторының сипаттауыш саны болса. $\tilde{A}:W_2^1(\Omega)\to W_2^1(\Omega)$, ал $\vartheta(x)-$осы санға сәйкес меншікті элемент.

§ Эллиптикалық оператор үшін жалпылама меншікті функцияның және меншікті мәннің қасиеттері

Гильберт кеңістігіндегі сызықтық, өзіне – өзі түйіндес, компакт операторлардың теориясынан белгілі.

1) (2) есептің ((3) есептің) саналымды жиыннан артық емес меншікті функциялары бар болады.

2) Бұл жиынның ақырлы шектік нүктесі болмайды.

3) Барлық меншікті мәндер нақты.

4) Әрбір меншікті санға H кеңістігінде ((2) есепте $\mathrm{H}=\overset{0}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$ және (3) есепте $\mathrm{H}=\mathrm{W}_2^1(\Omega)$) саны ақырлы өзара-ортонормаланған меншікті функциялар сәйкес келеді, яғни сызықты-тәуелсіз меншікті функциялардың ақырлы саны. Демек, әрбір меншікті мәннің ақырлы еселігі бар.

5) Әртүрлі меншікті санға сәйкес келетін H кеңістігіндегі ((2) есепте $\mathrm{H}=\overset{0}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$ және (3) есепте $\mathrm{H}=\mathrm{W}_2^1(\Omega)$) меншікті функциялар ортогональ.

6) Меншікті функцияларды нақты етіп таңдап алуға болады. Бұл қасиет L операторы нақты коэффициенттер мен нақты меншікті мәндерге ие болатындығынан шығады. Шынымен де, айталық λ_0 – меншікті мән және ϑ_0 – сәйкес меншікті функция болсын $L\vartheta_0=\lambda_0\vartheta_0$. Соңғы теңдіктен нақты және жорамал бөлігін анықтай отырып, $\vartheta_0=\vartheta_1+i\vartheta_2$ деп, λ_0 меншікті мәніне сәйкес ϑ_1 және ϑ_2 меншікті функция болатынын аламыз: $L\vartheta_k=\lambda_k\vartheta_k,\quad k=1,2...$ (яғни меншікті мәнннің еселігі артады).

7) Сонымен теорема 1 және теорема 2 бойынша A және $\widetilde{A}$ операторлары оң, онда (4),(5) интегралдық өрнегінен $\Phi\equiv\vartheta,\quad \|\vartheta\|_{2,\Omega}=1$ болғанда (1),(2) және (1),(3) есептерінің барлық меншікті мәндері теріс емес болады. Шынымен, (4) теңдеуіне Φ функциясының орнына $\vartheta(x)$ меншікті функцияны қою арқылы D есебі үшін аламыз

$$\int_\Omega\left[\sum_{k=1}^n p(x)\left|\frac{\partial\vartheta}{\partial x_k}\right|^2+q(x)|\vartheta|^2\right]dx=\lambda\int_\Omega|\vartheta|^2dx\geq 0,$$

және (3) есеп үшін

$$\int_\Omega\left[\sum_{k=1}^n p(x)\left|\frac{\partial\vartheta}{\partial x_k}\right|^2+q(x)|\vartheta|^2\right]dx+\int_{\partial\Omega}p(x)\sigma(x)|\vartheta|^2dS=\lambda\|\vartheta\|_{2,\Omega}^2\geq 0.$$

(3) есеп үшін $D(L)=\mathrm{W}_2^1(\Omega)$ және D есебі үшін $D(L)=\overset{0}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$ болатын (1) дифференциалдық өртекті L дифференциалдық операторымен белгілейміз. $\lambda=0$ саны L операторының меншікті мәні болғанда келесі теорема орынды.

Теорема 3 (3) есеп үшін $D(L)=\mathrm{W}_2^1(\Omega)$ және D есебі үшін $D(L)=\overset{0}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$ облысында анықталған L операторлық теңдеудің $\lambda=0$ меншікті мәні болуы үшін, $q(x)\equiv 0,\quad \sigma(x)\equiv 0$ (яғни (1) теңдеу үшін Нейман есебін қарастырғанда $q(x)\equiv 0$) болуы қажетті және жеткілікті. Сонымен қатар $\lambda=0$ жай (біреселі) меншікті мән және $\vartheta(x)=const$ -сәйкес меншікті функция.

Дәлелдеу (Қажеттілік "$\Rightarrow$") Айталық, $\lambda=0$ L операторының меншікті мәні, ал $\vartheta(x)=const\neq 0$ сәйкес меншікті функция.

Жалпылама функция анықтамасын (5) түрінде қарастырамыз және $\Phi(x)$ функциясы орнына $\vartheta(x)=\mathrm{W}_2^1(\Omega)$ (D есебінде $\Phi(x)$ орнына (4) формуласына $\vartheta(x)=\overset{0}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$ қоямыз). Сонымен аламыз

$$\int_\Omega\left[\sum_{k=1}^n p(x)\left|\frac{\partial\vartheta}{\partial x_k}\right|^2+q(x)|\vartheta|^2\right]dx+\int_{\partial\Omega}p(x)\sigma(x)|\vartheta|^2dS=0,$$

осыдан $p(x)|\nabla\vartheta|=0, q\vartheta=0$ яғни $\vartheta(x)=const$ болады, тек $q(x)\equiv 0, x\in\Omega$. Ал шекаралық интегралдан $x\in\Omega$ үшін $\sigma(x)\equiv 0$ аламыз. ($\Rightarrow$) дәлелденді.

Сонымен қатар, $\lambda = 0$ меншікті мәніне сәйкес $\vartheta(x) = const$ жалғыз меншікті функция, яғни $\lambda = 0$ біреселі меншікті мән.

(Жеткіліктілік "$\Leftarrow$") Айталық $q(x) \equiv 0, \quad \sigma(x) \equiv 0$ болсын және (3) есепті қарастырайық. $\lambda = 0$ саны Дирихле есебінде $\vartheta(x) = 0$ меншікті функциясына сәйкес келеді, яғни $\lambda = 0$ меншікті мән болмайды. Онда $(1), (3)$ есебі келесі түрде болады

$$-div(p(x)\nabla \vartheta(x)) = \lambda \vartheta(x), \quad x \in \Omega, \quad \left.\frac{\partial \vartheta}{\partial \vec{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0.$$

Бұл есеп үшін (5) интегралдық өрнегін қолдана отырып, аламыз

$$\int_{\Omega} \left[\sum_{k=1}^{n} p(x) \left| \frac{\partial \vartheta}{\partial x_k} \right|^2 \right] dx = 0, \quad p(x)\frac{\partial \vartheta}{\partial x_k} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \vartheta}{\partial x_k} = 0 \Rightarrow \vartheta(x) \equiv const .$$

Жоғарыда айтылған $(1), (2)$ (D есебі) және $(1), (3)$ (N есебі) есептерінің жалпылама меншікті функцияларының қасиеттерін нақтылап зерттейміз.

Есептің барлық меншікті мәндерін шамасының өсуіне байланысты нөмірлеуге болады

$$0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_n \le ...,$$

сонымен бірге λ_k еселігіне байланысты сонша рет қайталап жазамыз. Онда әрбір λ_k үшін тек бір ғана жалпылама меншікті функция сәйкес келеді

$$\vartheta_1(x), \vartheta_2(x),.., \vartheta_k(x),..., \tag{18}$$

сонымен қатар D есебі үшін $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде және N есебі үшін $W_2^1(\Omega)$ кеңістігінде $\vartheta_k(x)$ өзара ортогональ және $\|\vartheta_k\|_{2,\Omega} = 1$ болады.

Енді $\varphi(x) \in L_2(\Omega), \varphi(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega), \varphi(x) \in W_2^1(\Omega)$ функцияларын Фурье қатарына жіктеу есебін қарастырамыз және осы кеңістіктердегі алынған қатарлардың жинақтылығын зерттейміз.

Сұрақ: Меншікті функция құрай ма және қандай жағдайда олар сәйкес кеңістіктердің базисы болады?

Жауап: Ия.

Бұл үшін (14) және (17) операторлық теңдеуге λ_k және $\vartheta_k(x)$ қойып қарастырамыз:

$$\vartheta_k = (1 + \lambda_k) A \vartheta_k, \tag{19}$$

$$\vartheta_k = (1 + \lambda_k) \tilde{A} \vartheta_k. \tag{20}$$

$\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде (19) теңдеуін $\vartheta_k(x)$ функциясына скаляр көбейтіп және (11) пайдаланып:

$$\{\vartheta_k, \vartheta_k\}_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} = (\lambda_k + 1)\{A\vartheta_k, \vartheta_k\}_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} = (\lambda_k + 1)(\vartheta_k, \vartheta_k)_{2,\Omega} = (\lambda_k + 1). \tag{21}$$

$(21) \Rightarrow$

$$\frac{\vartheta_1}{\sqrt{\lambda_1 + 1}}, \frac{\vartheta_2}{\sqrt{\lambda_2 + 1}}, ..., \frac{\vartheta_k}{\sqrt{\lambda_k + 1}}, ..., \tag{22}$$

жүйе $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде ортонормаланған болады.

Дәл осылай, (20) теңдеуден (16) формула ($(1), (3)$ есебі үшін) бойынша $W_2^1(\Omega)$ кеңістігінде скаляр көбейтіндіні қолданып аламыз

$$\{\vartheta_k, \vartheta_k\}_{W_2^1(\Omega)} = (\lambda_k + 1)\{\tilde{A}\vartheta_k, \vartheta_k\}_{W_2^1(\Omega)} = (\lambda_k + 1)(\vartheta_k, \vartheta_k)_{W_2^1(\Omega)} = (\lambda_k + 1). \tag{23}$$

$(23) \Rightarrow$

$$\frac{\vartheta_1}{\sqrt{\lambda_1 + 1}}, \frac{\vartheta_2}{\sqrt{\lambda_2 + 1}}, ..., \frac{\vartheta_k}{\sqrt{\lambda_k + 1}}, ..., \tag{24}$$

(3) есеп үшін $W_2^1(\Omega)$ кеңістігінде ортонормаланған болады.

Функционалдық талдау курсынан Гильберт-Шмидт теореамасы белгілі:

Теорема 4 H гильберт кеңістігінде кез-келген сызықты, компакт, өзіне-өзі түйіндес A операторының (яғни $A : H \to H$) $\{e_k\}$ меншікті элементтерінің және сәйкес $\{\lambda_k\}$ меншікті мәндердің ортонормаланған жүйесі бар болады, яғни $\varphi \in H$ айнымалы элемент тек қана

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e_k + \varphi'$$

түрінде жіктеледі, мұндағы φ' $A\varphi' = 0$ шартын қанағаттандырады (яғни $\varphi' \in KerA$), $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e_k$ Фурье қатары H кеңістігінде жинақталады, әрі қарай $A\varphi'$ $\{e_k\}$ жүйесі бойынша келесі түрдегі Фурье қатарына жіктеледі

$$A\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k e_k \ .$$

Гильберт-Шмидт теореамасы маңызды салдарға ие:

Салдар: Айталық сызықты, компакт, өзіне-өзі түйіндес $A : \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ операторының өзегі тривиал болсын, онда $\{e_k\}$ жүйесі H кеңістігінде ортонормаланған базис болады.

Ескерте кететін жағдай, ортонормаланған $\{e_k\}$ жүйесі толық немесе H кеңістігінің ортонормаланған базисі деп аталады, егер кез келген $\varphi \in \mathrm{H}$ элементі H кеңістігінде жинақталатын осы жүйе бойынша $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e_k$ Фурье қатарына жіктелсе. Гильберт-Шмидт теореамасының салдарын пайдалансақ, алынған (22) ((24)) жүйесі $\overset{0}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$ ($\mathrm{W}_2^1(\Omega)$) кеңістігінде ортонормаланған базис болады. Ал $\overset{0}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$ ($\mathrm{W}_2^1(\Omega)$) кеңістігі шексіз өлшемді, онда (22) ((24)) жиыны да шектеусіз. Сондықтан $k \to \infty, \lambda_k \to \infty$. (18) жүйесінің $L_2(\Omega)$ кеңістігінде ортонормаланған екенін көрсетейік. Шынымен де, егер ϑ_k үшін (19) операторлық теңдеуін $\overset{0}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде ϑ_j скаляр көбейтіп, $k \neq j$ және сәйкес (20) теңдеуді $\mathrm{W}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде ϑ_j скаляр көбейтсек, $k \neq j$, онда (11) және (15) пайдаланып, аламыз

$$0 = \{\vartheta_k, \vartheta_j\}_{\overset{0}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)} = (\lambda_k + 1)\{A\vartheta_k, \vartheta_j\}_{\overset{0}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)} = (\lambda_k + 1)\{\vartheta_k, \vartheta_j\}_{2,\Omega}$$

$$0 = \{\vartheta_k, \vartheta_j\}_{W_2^1(\Omega)} = (\lambda_k + 1)\{\tilde{A}\vartheta_k, \vartheta_j\}_{W_2^1(\Omega)} = (\lambda_k + 1)\{\vartheta_k, \vartheta_j\}_{2,\Omega}.$$

Демек (18) жүйесі $L_2(\Omega)$ кеңістігінде ортонормаланған. Сонымен, (22) жүйесі $\overset{0}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде ортонормаланған базис (және сәйкес (24) $\mathrm{W}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде), онда осы жүйеге тартылған (натянутое) сызықтық көпбейнелік, яғни бұл (18) жүйесі $\overset{0}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде барлық жерде тығыз (және сәйкес $\mathrm{W}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде). Бірақ $\overset{0}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігі (және сәйкес $\mathrm{W}_2^1(\Omega)$ кеңістігі) $L_2(\Omega)$ кеңістігінде барлық жерде тығыз, осыдан (18) жүйесі $L_2(\Omega)$ кеңістігінде ортонормаланған базис болады, яғни кез келген $\varphi \in L_2(\Omega)$ элементі $L_2(\Omega)$ кеңістігінде жинақталатын Фурье қатарына жіктеледі

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \vartheta_k(x), \qquad (25)$$

мұндағы $\varphi_k = (\varphi, \vartheta_k)_{2,\Omega}$ $\vartheta_k(x)$ жүйесі бойынша жіктелеген $\varphi(x)$ функциясының Фурье коэффициенті және бұл үшін Парсеваль теңдігі орынды

$$\|\varphi\|_{2,\Omega}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k|^2 \ . \qquad (26)$$